

# Problemas Directo e Inverso para el Abatimiento del Manto Freático

Mercado E. J. R<sup>1</sup>., Hernández G. G.<sup>2</sup>,  
Ramos L. J. A.<sup>2</sup>, Ockendon H.<sup>3</sup>,  
Brambila P. F.<sup>4</sup>

1. IMTA (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua),  
rmercado@riego.imta.mx
2. Instituto de Geofísica de la UNAM,  
ghdez@tonatiuh.igeofcu.unam.mx
3. Oxford Univ., ockendon@maths.ox.ac.uk
4. Facultad de Ciencias de la UNAM,  
fbp@hp.fciencias.unam.mx

Artículo Expositorio.

Tema: Matemáticas Aplicadas.

Abril 1997.\*

## Resumen

Se estudia el problema directo de la evolución temporal del manto freático. Se encuentra la solución para el régimen permanente. Con el análisis de grupo de la ecuación de Boussinesq para infiltración, se halla la solución del régimen transitorio. El método se generaliza fácilmente a cualquier dimensión.

Para cerrar el ciclo, se resuelve el problema inverso de la porosidad drenable para un acuífero freático.

---

\*Este artículo está en su versión final y no será publicado en otra parte.

# 1 Introducción

Los suelos agrícolas son la fuente de los alimentos y vestidos de los pueblos del mundo. La salinidad afecta extensas zonas de los suelos agrícolas de numerosos países. En el caso de México, la importancia del problema puede apreciarse en su contexto económico. Para ello es conveniente recordar algunas cifras referentes al proceso de salinización de los suelos agrícolas, [15].

En los dos millones de kilómetros cuadrados de la superficie total de la República Mexicana, se cuenta con aproximadamente 30 millones de hectáreas potencialmente agrícolas; de ellas se siembran 23 millones, se cosechan 19 millones y se hallan bajo riego 6 millones de hectáreas.

En las zonas de riego se ha producido un progresivo ensalitramiento del suelo ocasionado por el uso inadecuado del agua. El área afectada se estima en 600 mil hectáreas (10%).

En 1995 se recuperaron 40 hectáreas en el Valle del Carrizo, Sinaloa, instalando un sistema de drenaje parcelario con separación de drenes de 25 mts y de 50 mts.

En la actualidad están en proceso de recuperación cerca de 10 mil hectáreas en el noroeste del país, en donde se combinan sistemas de drenaje topo con los sistemas entubados.

## 1.1 Planteamiento del Problema

Dentro de la pasada reunión de Industria y Matemáticas, celebrada en Febrero de 1997 en Cocoyoc Morelos, se presentó el siguiente problema:

Para un sistema de drenes hallar:

1. La fórmula de descarga por unidad de longitud.
2. La solución para la ecuación adimensionalizada de evolución del manto freático.
3. Escenarios para maximizar la separación entre drenes.
4. La posible relación entre la potencia del coeficiente de transmisividad y la separación entre drenes.

En el presente artículo nos abocamos a la solución parcial del problema anterior. Presentaremos la solución en dos partes: en la primera estudiamos el problema directo, dentro del cual hallaremos la fórmula para el nivel freático tanto en régimen permanente como en el transitorio. En la segunda, para el problema inverso haremos uso del *Teorema M-B # 1* [13], acerca de la fractalización del coeficiente de difusión y la dependencia funcional que

puede inferirse de su combinación con el análisis de grupo de la ecuación diferencial. Podremos entonces, también plantearnos el problema inverso de la porosidad drenable y resolverlo para el caso de su dependencia con la presión.

## 1.2 Antecedentes

Dentro de los principales resultados conocidos referentes al tema pueden citarse los siguientes:

Las hipótesis de Dupuit (1865) se resumen en: 1. Las líneas de corrientes son casi horizontales, para pequeñas inclinaciones del manto freático . 2. Las velocidades por estas líneas de corrientes son proporcionales a las pendientes del manto freático, e independientes de la profundidad.

Estas hipótesis fueron usadas por Forchheimer en 1930, y en la actualidad son conocidas como hipótesis D-F. (Dupuit-Forchheimer).

Las primeras ecuaciones de drenaje fueron desarrolladas entre otros por Koseny (1932) y Russell (1934), asumiendo los drenes ubicados sobre el estrato impermeable.

Posteriormente, Hooghoudt (1940) desarrolla una fórmula que da una relación directa entre la descarga y la altura del manto freático a la mitad de los drenes. Se basa en las hipótesis D-F, con drenes enterrados a cierta altura del estrato impermeable. Una de sus virtudes radica en su aplicabilidad para suelos estratificados y una de sus desventajas es la determinación previa de la ubicación del sustrato impermeable ( $d_0$  en la figura 1).

Puede citarse también el trabajo de Donnan W. W. (1946).

En el 58, puede destacarse el trabajo de Kirkham D. [10] basado en aproximaciones físicas en suelos homogéneos y un análisis matemático exacto con el uso de la variable compleja, para la altura máxima del manto freático mucho menor que la altura de los drenes :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{LQ}{\pi K_s} \ln \frac{L}{\pi r}, \quad h\left(\frac{1}{2}\right) \ll d_0,$$

Wesseling J. (1964) [24] prueba que la diferencia entre los resultados de las fórmulas de Hooghoudt y Kirkham es menor del 5%, cuando se desprecia el flujo en el estrato ubicado sobre los drenes.

En trabajos más recientes, Tang Y. K., Skaggs R. W. (1977) [21] resuelven la ecuación de Richards por diferencias finitas, tanto para drenaje como para subirrigación . Realizan comparaciones tanto con resultados experimentales como con métodos aproximados, como es el caso de la ecuación de Boussinesq,

incluso con porosidad drenable variable. Encuentran excelente concordancia tanto de la ecuación de Richards con las observaciones experimentales, como de éstos con los resultados de la ecuación de Boussinesq.

Hathoot H. M. (1984) [7] encuentra la fórmula de descarga con el uso de la teoría de la variable compleja y el método de imágenes.

Fipps G., Skaggs R. W. (1986) [5] usan cuatro métodos para aproximar los drenes por elementos finitos y resuelven la ecuación de Richards.

Toledo P. G. et al. (1990) [23] con la teoría de la geometría fractal y la física de las películas delgadas, representan las características hidrodinámicas como funciones en potencias.

Mercado J. R. et al. (1996) [13] con el estudio del problema inverso para la difusividad hidráulica y la aplicación del análisis no-standard en los fractales autosimilares, demuestran la naturaleza fractal de la difusividad.

### 1.3 Formulación

Se recuerda que la ecuación de Boussinesq para filtración [21] se describe por:

$$\phi h_t = (K_s h h_x)_x,$$

en donde los subíndices indican las respectivas derivadas parciales, y se denota con  $h$  la elevación del manto freático y con  $K_s$  la conductividad saturada.

Si se considera un corte del suelo con el perfil del contenido de humedad en equilibrio y el manto freático a cierta altura, el nuevo espacio poroso que se llena cuando el manto se eleva y el perfil de la curva de equilibrio se desplaza, se conoce como porosidad drenable  $\phi$  (%). Tanto ésta como la conductividad hidráulica  $K$  (m/día) dependen esencialmente de la geometría de los poros del suelo y sus valores están correlacionados. Una estimación aproximada se da por la relación [19]:

$$\phi = \left( \frac{K}{K_s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Una versión generalizada de la ecuación de Boussinesq puede enunciarse como:

$$h_t = \left( K_s h_b^{1-p} h^p h_{\bar{x}} \right)_{\bar{x}},$$

donde  $p$  es la potencia y  $h_b$  un valor de referencia. El valor  $p = 1$  corresponde a la versión ordinaria de la ecuación.

Aplicando el teorema del valor medio, se acostumbra tomar la porosidad como una constante característica del material. La versión generalizada con

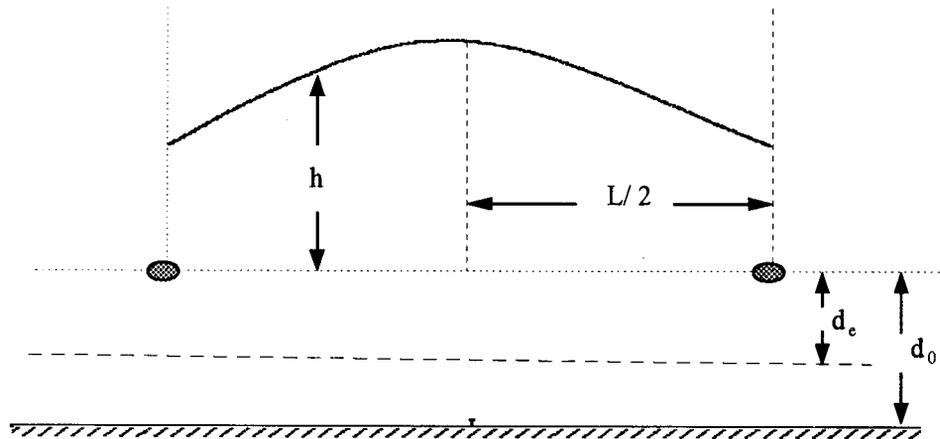


Figura ~1:

fuente  $q$  (m/día) y condiciones de frontera e iniciales, se representa en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 h_t &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_s}{\phi} h_b^{1-p} h^p \frac{\partial h}{\partial x} \right) + q(t) \\
 h(x, 0) &= h_0(x) \\
 h(0, t) &= h_1(t) \\
 h(L, t) &= h_2(t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

y se ilustra en la figura (1), [6], el significado de algunas de las magnitudes.

## 1.4 Solución

Dentro del problema directo, se suponen conocidos los coeficientes así como las condiciones iniciales y de frontera de la ecuación diferencial y el objetivo es hallar las soluciones, tanto para régimen estacionario como para el transitorio.

### 1.4.1 Solución estacionaria

Para el régimen permanente se estudia la ecuación (1.4.1) inhomogénea con término fuente  $q$  y con condiciones iniciales y de frontera nulas, después de una primera integración resulta:

$$0 = \frac{K_s}{\phi} h_b^{1-p} h^p \frac{\partial h}{\partial x} + \left( x - \frac{L}{2} \right) q_0,$$

integrando nuevamente se halla:

$$\frac{K_s}{\phi} h_b^{1-p} \frac{h^{p+1}}{p+1} = -\frac{q_0}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + q_0 \frac{L^2}{8} + \frac{K_s h_b^{1-p}}{(p+1)\phi} d_0^{p+1},$$

y al evaluar en la mitad de los drenes  $x = \frac{L}{2}$ , denotar  $h_M = h\left(\frac{L}{2}\right)$ , y  $h_b$  como un valor de referencia que ajuste las unidades físicas, se encuentra que:

$$L^2 = \frac{8K_s h_b^2}{q_0 \phi (p+1)} \left( \left(\frac{h_M}{h_b}\right)^{p+1} - \left(\frac{d_0}{h_b}\right)^{p+1} \right).$$

dependiendo de la relación específica de  $\phi$  con  $h$  y su potencia  $p$ , este resultado se generaliza a:

$$L^2 = \frac{8K_s h_b^2}{q_0 \phi} \int_{d_e}^{h_M} F\left(\frac{h}{h_b}, p\right) dh.$$

donde se ha sustituido  $d_0$  por  $d_e$ , que es la profundidad del estrato equivalente (ver figura 1), lo cual permite corregir el flujo radial no considerado en esta aproximación; también se le llama profundidad aparente del estrato impermeable. Se tiene entonces la solución al punto 4 del planteamiento del problema, en donde se pregunta por la posible relación entre la potencia del coeficiente de transmisividad y la separación interdrenes.

### 1.4.2 Solución transitoria

Dentro del problema directo, se busca la solución transitoria de la versión ordinaria ( $p = 1$ ) de la ecuación de Boussinesq [19], [18], [6], con la representación de la carga hidráulica por  $u$ ,

$$\begin{aligned} \phi u_t &= (K_s u u_x)_x \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u(0, t) &= u_1(t) \\ u(L, t) &= h_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

De acuerdo con los conceptos de análisis de grupo de las ecuaciones diferenciales, se aplica el criterio de invarianza sobre la ecuación de Boussinesq, transitoriamente considerando que  $K_s$  y  $\phi$  son constantes unitarias, representada por:

$$\Delta = u u_{xx} + u_x^2 - u_t. \tag{3}$$

La sección campo vectorial 2-jet  $j^{(2)}\mathbf{v}(\cdot)$

$$\mathbf{v} = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \phi \partial_u \quad (4)$$

$$j^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \partial_{u_x} + \phi^t \partial_{u_t} + \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} + \phi^{xt} \partial_{u_{xt}} + \phi^{tt} \partial_{u_{tt}}, \quad (5)$$

aplicada sobre  $\Delta$  nos da:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\mapsto \phi u_{xx} \\ \phi^x \partial_{u_x} &\mapsto 2\phi^x u_x \\ \phi^t \partial_{u_t} &\mapsto -\phi^t \\ \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} &\mapsto \phi^{xx} u \\ \phi^{xt} \partial_{u_{xt}} &\mapsto 0 \\ \phi^{tt} \partial_{u_{tt}} &\mapsto 0, \end{aligned} \quad (6)$$

nos resulta la ecuación

$$\phi u_{xx} + 2\phi^x u_x - \phi^t + \phi^{xx} u = 0. \quad (7)$$

Esta ecuación desplegada produce un polinomio en 8 variables: las variables independientes, la variable dependiente y sus derivadas hasta el orden dos:

Evaluamos sus coeficientes empezando por los de orden superior

$$\begin{aligned} u_x u_{xt} &\mapsto -2\tau_{uu} = 0 \\ u_{xt} &\mapsto -2\tau_x = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

lo que nos dice que la función  $\tau$  no depende de  $u$  ni de  $x$ , sólo depende de  $t$

$$\tau = \tau(t), \quad (9)$$

este resultado nos reduce las expresiones para la ecuación (7).

Continuamos la evaluación de coeficientes

$$u_x u_{xx} \mapsto \xi_u = 0, \quad (10)$$

nos reduce aún más las expresiones para (7).

Los nuevos coeficientes dan

$$u_{xx} \mapsto \phi + (\tau_t - 2\xi_x) u = 0 \quad (11)$$

$$u_x^2 \mapsto \phi_u - 2\xi_x + \tau_t + \phi_{uu}u = 0 \quad (12)$$

$$u_x \mapsto 2\phi_x + \xi_t + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u = 0 \quad (13)$$

$$u_x^0 \mapsto -\phi_t + \phi_{xx}u = 0. \quad (14)$$

De la ecuación (11) obtenemos para  $\phi$

$$\begin{aligned} \phi &= (-\tau_t + 2\xi_x)u \\ \phi_t &= (-\tau_{tt} + 2\xi_{xt})u \\ \phi_{xx} &= 2\xi_{xxx}u, \end{aligned}$$

luego en (14):

$$\begin{aligned} -\phi_t + \phi_{xx}u &= 0 \\ -(-\tau_{tt} + 2\xi_{xt})u + 2\xi_{xxx}u^2 &= 0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \xi_{xxx} &= 0 \\ \xi &= \frac{1}{2}x\tau_t + \rho x^2 + \beta x + \gamma(t), \end{aligned}$$

enseguida

$$\phi = (4\rho x + 2\beta)u, \quad (15)$$

en (12)

$$\phi_u - 2\xi_x + \tau_t + \phi_{uu}u = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_u &= 4\rho x + 2\beta \\ \phi_{uu} &= 0 \\ \xi_x &= \frac{1}{2}\tau_t + 2\rho x + \beta \end{aligned}$$

y la ecuación (12) se reduce a una identidad.

De la ecuación (13)

$$2\phi_x + \xi_t + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u = 0,$$

con

$$\begin{aligned} \xi_t &= \frac{1}{2}x\tau_{tt} + \gamma_t \\ \xi_{xx} &= 2\rho \\ \phi_{xu} &= 4\rho \\ \phi_x &= 4\rho u, \end{aligned} \quad (16)$$

estas ecuaciones a su vez producen

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \tau_{tt} &= 0 \\ \gamma_t &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \delta t + \sigma \\ \gamma &= cte,\end{aligned}\tag{17}$$

finalmente el generador infinitesimal es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \left(\frac{1}{2}x\delta + \beta x + \gamma\right) \partial_x + (\delta t + \sigma) \partial_t + 2\beta u \partial_u \\ &= \gamma \partial_x + \sigma \partial_t + \beta (x \partial_x + 2u \partial_u) + \delta (x \partial_x + 2t \partial_t).\end{aligned}\tag{18}$$

### 1.4.3 Los grupos de la ecuación de Boussinesq de infiltración

Ahora hallamos los grupos [2], [16]:

Para  $\mathbf{v}_1 = 1\partial_x$  tenemos

$$\begin{aligned}1 &= \frac{dx}{d\varepsilon}, x(0) = x \\ x(\varepsilon) &= \varepsilon + x,\end{aligned}\tag{20}$$

así que

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(R_g^{-1}(\tilde{x}), \tilde{t}) = f(R_{g^{-1}}(\tilde{x}), \tilde{t}) = f(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{t}) \\ G_1 : (x, t, u) &\mapsto g \cdot (x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = (x + \varepsilon, t, u).\end{aligned}\tag{21}$$

Para  $\mathbf{v}_2 = 1\partial_t$  análogamente

$$\begin{aligned}t(\varepsilon) &= \varepsilon + t \\ \tilde{u} &= f(\tilde{x}, \tilde{t} - \varepsilon) \\ G_2 : (x, t, u) &\mapsto (x, t + \varepsilon, u).\end{aligned}\tag{22}$$

Para  $\mathbf{v}_3 = x\partial_x + 2u\partial_u$  se tiene

$$\begin{aligned}x &= \frac{dx}{d\varepsilon}, x(0) = x \\ 2u &= \frac{du}{d\varepsilon}, u(0) = u,\end{aligned}\tag{23}$$

luego

$$\begin{aligned}x(\varepsilon) &= xe^\varepsilon \\u(\varepsilon) &= ue^{2\varepsilon}\end{aligned}\tag{24}$$

$$\tilde{u} = e^{2\varepsilon} f(\tilde{x}e^{-\varepsilon}, \tilde{t}),$$

así que

$$G_3 : (x, t, u) \mapsto (xe^\varepsilon, t, ue^{2\varepsilon}).\tag{25}$$

Para  $\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2t\partial_t$

$$\begin{aligned}x(\varepsilon) &= xe^\varepsilon \\t(\varepsilon) &= te^{2\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\tilde{u} = f(\tilde{x}e^{-\varepsilon}, \tilde{t}e^{-2\varepsilon}),$$

así que

$$G_4 : (x, t, u) \mapsto (xe^\varepsilon, te^{2\varepsilon}, u).\tag{26}$$

#### 1.4.4 Una colección de soluciones de la ecuación de Boussinesq

Como los generadores conforman un álgebra de Lie, sus combinaciones lineales están nuevamente en el álgebra y son a su vez generadores. Combinamos  $\mathbf{v}_4$  con  $\mathbf{v}_3$  para formar el generador

$$\mathbf{v}_5 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 = 2x\partial_x + 3t\partial_t + u\partial_u.\tag{27}$$

Las características de este generador se determinan por

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{3t} = \frac{du}{u},\tag{28}$$

se halla la solución de la primera y se define por  $y$  la primera variable de similitud

$$\frac{x}{t^{\frac{2}{3}}} = cte = y,\tag{29}$$

se halla luego la solución de la segunda y se define la variable  $v$

$$\frac{u}{t^{\frac{1}{3}}} = cte = v.\tag{30}$$

Calculamos las derivadas de la ecuación diferencial y obtenemos

$$u_t = t^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{3}v - \frac{2}{3}yv' \right) \quad (31)$$

$$u_x = t^{-\frac{1}{3}}v'$$

$$u_{xx} = t^{-1}v'', \quad (32)$$

en donde  $v'$  indica derivada con respecto a  $y$ , entonces la ecuación diferencial produce

$$t^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{3}v - \frac{2}{3}yv' \right) = t^{-\frac{2}{3}} (vv'' + (v')^2) \quad (33)$$

y obtenemos una ecuación independiente de  $t$ , y que, sólo depende de  $y$ .

Despejamos el término  $vv''$  y nos resulta

$$vv'' = \frac{1}{3}v - \frac{2}{3}yv' - (v')^2, \quad (34)$$

derivamos esta ecuación con respecto a  $y$  para hallar

$$vv_{yyy} = -\frac{1}{3}v' - \left( 3v' + \frac{2}{3}y \right) v'', \quad (35)$$

encontramos entonces la condición necesaria y suficiente para la anulación de la tercera derivada

$$v_{yyy} = 0 \Leftrightarrow \left( 3v' + \frac{2}{3}y \right) v'' = -\frac{1}{3}v',$$

luego

$$v = a + by + cy^2$$

y entonces los coeficientes son

$$c = -\frac{1}{6}, b = 0,$$

así que

$$v(y) = a - \frac{1}{6}y^2. \quad (36)$$

Para que sea solución también de (34), se obtiene  $a = 0$ , luego

$$v(y) = -\frac{1}{6}y^2, \quad (37)$$

regresando a las variables originales

$$u = vt^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{6}y^2 = -\frac{1}{6} \frac{x^2}{t},$$

pero entonces

$$u + \frac{1}{6} \frac{x^2}{t} = w(t),$$

también es solución si y sólo si

$$w'(t) = -\frac{1}{3} \frac{w(t)}{t}$$

y se encuentra que

$$w(t) = \frac{cte}{t^{\frac{1}{3}}},$$

las soluciones finalmente son [8]

$$u(x, t) = \frac{cte}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{6} \frac{x^2}{t}. \quad (38)$$

Pueden usarse ahora los grupos para hallar nuevas soluciones, porque estos transforman soluciones en soluciones.

En particular, con el uso de los grupos  $G_1$  de las translaciones espaciales, el  $G_2$  de las translaciones temporales y volviendo a introducir los parámetros hidrodinámicos  $K_s$  y  $\phi$ , las soluciones se presentan como

$$u(x, t) = \frac{cte}{\left(\frac{K_s}{\phi}(t+t_0)\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{6} \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{\frac{K_s}{\phi}(t+t_0)}. \quad (39)$$

Estas soluciones satisfacen la condición de anulamiento de la pendiente para todos los instantes permisibles, en la mitad de la separación interdrenes

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{1}{3} \frac{x - \frac{L}{2}}{\frac{K_s}{\phi}(t+t_0)} \Bigg|_{x=\frac{L}{2}} = 0, \quad (40)$$

para cada instante permisible la forma de la curva es una parábola con vértice en la mitad de la separación interdrenes, que se abre hacia abajo, con pendiente positiva en el extremo izquierdo y pendiente negativa en el extremo derecho, con curvatura que depende de los parámetros hidrodinámicos y que decrece con el transcurso del tiempo. En particular, sobre los drenes se observa un descenso paulatino y para instantes suficientemente grandes la solución se hace nula.

Puede satisfacerse la condición de frontera del tipo Dirichlet

$$u(0, t) = u_1(t) = u_2(t) = \frac{cte}{\left(\frac{K_s}{\phi}(t + t_0)\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{24} \frac{L^2}{\frac{K_s}{\phi}(t + t_0)} \quad (41)$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \frac{cte}{\left(\frac{K_s}{\phi}t_0\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{6} \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{\frac{K_s}{\phi}t_0}.$$

Con esta colección de soluciones (39), también es posible satisfacer una condición de frontera del tipo Robin,

$$u_x - \gamma u|_{x=0} = 0$$

con coeficiente de enlace  $\gamma$  dependiente del tiempo, el cual resulta

$$\gamma = \frac{1}{6} \frac{L}{cte \left(\frac{K_s}{\phi}(t + t_0)\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{L^2}{24}} \quad (42)$$

y debe satisfacerse la condición

$$cte \left(\frac{K_s}{\phi}(t + t_0)\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{L^2}{24} > 0,$$

se observa que para instantes de tiempo suficientemente grandes el coeficiente  $\gamma$  tiende a cero y el enlace se pierde transformándose en una condición de tipo Neumann (flujo nulo).

Se ilustra en la figura (2), la gráfica de la solución transitoria (39):

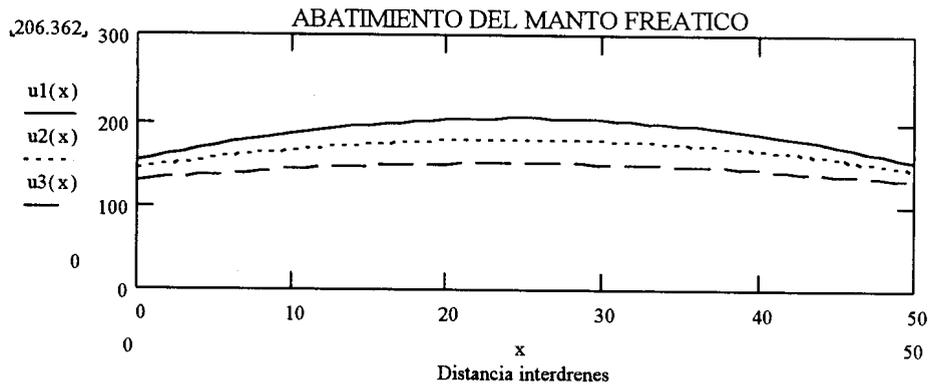


Figura ~2:

## 1.5 El Problema Inverso

Se asume que la ecuación de Boussinesq en el caso unidimensional tiene un coeficiente de transmisividad  $T(h)$  y una porosidad drenable que depende de  $h$ , se quiere determinar la relación funcional de esta porosidad drenable,

$$\phi(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (43)$$

Como en los problemas inversos, conviene aplicar una transformación de Kirchhoff

$$u(h) = \int_{h_0}^h T(\bar{h}) d\bar{h}, \quad (44)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = T(h) \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

además

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = T(h) \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (45)$$

Hacemos

$$B(u) = \frac{\phi(h)}{T(h)}, \quad (46)$$

así que la ecuación de Boussinesq se transforma en

$$B(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (47)$$

Se aplica el criterio de invarianza sobre la ecuación representada por: [16],

$$\Delta = u_{xx} - B(u) u_t. \quad (48)$$

La sección campo vectorial 2-jet  $j^{(2)}\mathbf{v}(\cdot)$

$$\mathbf{v} = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \phi \partial_u \quad (49)$$

$$j^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \partial_{u_x} + \phi^t \partial_{u_t} + \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} + \phi^{xt} \partial_{u_{xt}} + \phi^{tt} \partial_{u_{tt}}, \quad (50)$$

aplicada sobre  $\Delta$  nos da:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\mapsto \phi B' u_t \\ \phi^x \partial_{u_x} &\mapsto 0 \\ \phi^t \partial_{u_t} &\mapsto -B \phi^t \\ \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} &\mapsto \phi^{xx} \\ \phi^{xt} \partial_{u_{xt}} &\mapsto 0 \\ \phi^{tt} \partial_{u_{tt}} &\mapsto 0, \end{aligned} \quad (51)$$

y nos resulta la ecuación

$$\phi B' u_t - B \phi^t + \phi^{xx} = 0, \quad (52)$$

en donde

$$\begin{aligned} \phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{tx} + \tau u_{tt} = D_t \phi - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau \\ &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) - \xi_u u_x \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) - \tau_u \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right)^2 \end{aligned}$$

y la expresión para  $\phi^{xx}$  después de reemplazar  $u_t$  por  $\frac{1}{B} u_{xx}$ ,

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 \\ &\quad - 2\tau_{xu} u_x \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} \\ &\quad - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}, \end{aligned}$$

entonces la ecuación se transforma en

$$\phi B' \left( \frac{u_{xx}}{B} \right) - B\phi^t + \phi^{xx} = 0. \quad (53)$$

Esta ecuación desplegada también produce un polinomio en 8 variables: las variables independientes, la variable dependiente y sus derivadas hasta el orden dos:

Evaluamos sus coeficientes empezando por los de orden superior

$$\begin{aligned} u_x u_{xt} &\mapsto -2\tau_u = 0 \\ u_{xt} &\mapsto -2\tau_x = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

lo que nos dice que la función  $\tau$  no depende de  $u$  ni de  $x$ , sólo depende de  $t$

$$\tau = \tau(t), \quad (55)$$

este resultado nuevamente, nos reduce las expresiones para la ecuación (52)

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) - \xi_u u_x \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) \quad (56)$$

y

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 \\ &\quad - \xi_{uu} u_x^3 + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx}. \end{aligned} \quad (57)$$

Continuamos la evaluación de coeficientes

$$u_x u_{xx} \mapsto \xi_u = 0, B \neq \frac{1}{3}, \quad (58)$$

así  $\xi$  depende sólo de  $x$  y  $t$  y esto nos reduce aún más las expresiones para (52)

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) \left( \frac{1}{B} u_{xx} \right) \quad (59)$$

y

$$\phi^{xx} = \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + \phi_{uu} u_x^2 + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx}. \quad (60)$$

Los nuevos coeficientes dan

$$u_{xx} \mapsto \phi \frac{B'}{B} + \tau_t - 2\xi_x = 0 \quad (61)$$

$$u_x^2 \mapsto \phi_{uu} = 0 \quad (62)$$

$$u_x \mapsto B\xi_t + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) = 0 \quad (63)$$

$$u_x^0 \mapsto -B\phi_t + \phi_{xx} = 0. \quad (64)$$

De la ecuación (61) obtenemos para  $\phi$

$$\phi = \frac{B}{B'} (-\tau_t + 2\xi_x), \quad (65)$$

al sustituir en (62) se obtiene

$$\phi_{uu} = \left(\frac{B}{B'}\right)_{uu} (2\xi_x - \tau_t), \quad (66)$$

entonces

$$\left(\frac{B}{B'}\right)_{uu} = 0, \quad (67)$$

o bien la otra posibilidad consiste en que el segundo factor se anule

$$2\xi_x - \tau_t = 0, \quad (68)$$

al continuar con el análisis para determinar las componentes del generador  $\mathbf{v}$ , se encuentra que en este caso el coeficiente  $B$  sería arbitrario, lo cual entraría en contradicción con *teorema M-B # 1*, que lo clasifica como la transformada de Fourier inversa de un proceso de Cantor generalizado, [13],

$$\hat{B}(\alpha, y') = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \partial_{q_n}^{(n)} \left(\frac{1}{q_n}\right) \cdot (n+1) \int^{(n)} p_n dp_n, \quad (69)$$

si la función de los datos  $\frac{1}{q_n}$  es una función completamente monótona en  $IR^+$ , por el teorema de Krein-Milman, [3], en su versión teorema de Bernstein, esta función es representable como la transformada de Laplace de una medida de Radon positiva y acotada en  $IR^+$ , luego el coeficiente  $B$  es representable como la transformada de Fourier inversa de una medida de Radon positiva y acotada, entonces es una función definida positiva y continua en  $IR$ .

Recíprocamente, si  $B$  es una función definida positiva y continua en  $IR$ , entonces, nuevamente por el teorema de Krein-Milman, ahora en su versión teorema de Bochner, es representable como la transformada de Fourier inversa de una medida de Radon positiva y acotada, luego la función de los datos

es la transformada de Laplace de una medida de Radon positiva y acotada en  $IR^+$  y por tanto resulta ser una función completamente monótona en  $IR^+$ .

En resumen, hay una interrelación entre el carácter definido positivo y continuo del coeficiente  $B$  y el carácter completamente monótono de la función de los datos, y, el coeficiente  $B$  se representa por:

$$B(u, y') = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (n+1) \mathcal{F}_{(\alpha, u)}^{-1} \left( \partial_{q_n}^{(n)} \left( \frac{1}{q_n} \right) \cdot \int^{(n)} p_n dp_n \right). \quad (70)$$

Por tanto, sólo es posible la primera de las dos opciones que se aluden en (68), la cual esta dada por la ecuación (67):

$$\left( \frac{1}{\frac{d \ln B}{du}} \right)_{uu} = 0,$$

y se obtiene

$$B(u) = a(u+b)^q, \quad (71)$$

con  $a$ ,  $b$  y  $q$  constantes arbitrarias. Por la arbitrariedad de las constantes y la definición del número de Neper  $e$ , también es posible la presentación

$$B(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} a \left( 1 + \frac{u}{mu_0} \right)^m \quad (72)$$

$$= ae^{\frac{u}{u_0}}, \quad (73)$$

y con su representación compleja

$$B(u) = \Re e \tilde{B} = \Re e \left( ae^{i \frac{u}{u_0}} \right),$$

para cualquier función continua con soporte compacto  $f$ , con la notación  $\check{f}(u) = f(-u)$ , se comprueba fácilmente, la desigualdad

$$\tilde{B} * f * \check{f}(0) = \int \tilde{B}(u_1 - u_2) f(u_1) \overline{f(u_2)} du_1 du_2 \geq 0, \quad (74)$$

que caracteriza a las funciones definidas positivas continuas, definidas en  $IR$  y con imagenes en los complejos.

De otra parte, apelando nuevamente a la arbitrariedad de las constantes y regresando a la ecuación (46) se encuentra que

$$\frac{\phi(u)}{T(u)} = a'(u+b')^q, \quad (75)$$

La altura  $h$  esta medida a partir del nivel de los drenes que coincide con el nivel del estrato equivalente, luego el coeficiente de transmisividad se expresa por  $T(h) = K_s h^p$ , entonces

$$u(h) = \int_{h_0}^h K_s \bar{h}^p d\bar{h} = \frac{1}{p+1} K_s (h^{p+1} - h_0^{p+1}), \quad (76)$$

luego, con  $a$  una constante arbitraria,

$$\phi(h) = a (h^{p+1} - h_0^{p+1})^p (h^{p+1} - h_0^{p+1} + b')^q,$$

renombrando las constantes  $a$  y  $b'$  se obtiene

$$\phi(h) = \phi_0 \left(1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{p+1}\right)^p \left(1 + b \left(\frac{h}{h_0}\right)^{p+1}\right)^q, \quad (77)$$

en donde  $\phi_0$  sería la porosidad drenable de referencia, y,  $b$  y  $q$  son constantes arbitrarias. En particular se observa que sobre la superficie del suelo se verifica, como debe de ser, la condición de frontera  $\phi(h_0) = 0$  y que también debe cumplirse la condición  $p > 0$ .

Cuando se realiza un corrimiento de los ejes coordenados para ubicar el origen a nivel de los drenes, entonces el nivel de transmisividad cero es la profundidad del estrato equivalente que permite corregir el flujo radial no considerado:  $h = -d_e$  y en la fórmula anterior para la porosidad drenable hay que sustituir  $h \mapsto h + d_e$ , y  $h_0 \mapsto h_0 + d_e$ .

Con la otra presentación dada en la ecuación (72), resulta la fórmula

$$\phi(h) = \phi_0 \left(1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^2\right) e^{b \left(1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^2\right)}.$$

Gupta [6] obtuvo una versión empírica para  $\phi(h)$  de la siguiente forma:

$$\phi_G(h) = \phi_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) \left(1 + b \frac{h}{h_0}\right)^{-1}, \quad (78)$$

el cuál es uno de los resultados obtenidos teóricamente en este trabajo, con los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} q &\mapsto -1, \\ p &\mapsto 1, \\ \frac{h}{h_0} &\mapsto \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (79)$$

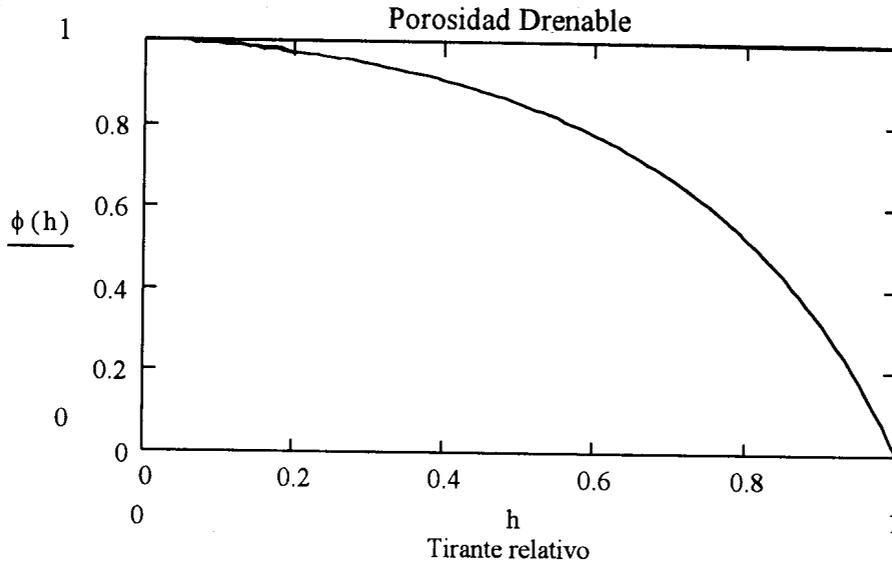


Figura ~3:

La función para la porosidad drenable de Gupta se ilustra en la figura (3).

### 1.5.1 Porosidad Drenable

Podríamos utilizar la solución transitoria del abatimiento del manto freático (39), para resolver el problema inverso de la estimación empírica de la porosidad drenable, sobre el supuesto de que la conductividad saturada ha sido determinada, por ejemplo, por los triángulos de textura u otros métodos.

Para una serie de datos sustituidos en la solución (39), se obtiene una serie de soluciones para la porosidad drenable, cuyo promedio nos daría un estimado de esta característica:

$$h_i(x_i, t_i; b_i) = \frac{1}{6} \max \left\{ 0, \frac{b_i^2}{\left( \frac{K_{si}}{\phi_i} (t_i + t_0) \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left| x_i - \frac{L}{2} \right|^2}{\left( \frac{K_{si}}{\phi_i} (t_i + t_0) \right)} \right\},$$

bajo las condiciones

$$\forall b_i = cte : b_i^2 - \frac{\left|x_i - \frac{L}{2}\right|^2}{\left(\frac{K_{ai}}{\phi_i} (t_i + t_0)\right)^{\frac{2}{3}}} > 0.$$

## Referencias

- [1] Bluman G. W., Kumei S., *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag (1989).
- [2] Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick M., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, (1982).
- [3] Edwards, R. E., *Functional Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, (1965).
- [4] Engl H. W. *Inverse Problems*, Aportaciones Matemáticas, S.M.M., Oaxaca, (1995).
- [5] Fipps G., Skaggs R. W., *Drains as a Boundary Condition in Finite Elements*, Water Resources Research, vol 22, 11,1613-1621, (1986).
- [6] Gupta R., K., Bhattacharya A. K., Chandra P., *Unsteady Drainage with Variable Drainage Porosity*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, vol 120, N° 4, July/August, (1994).
- [7] Hathoot H. M., *Hydrodynamical Analysis of Double Mole Drains*, Intern. Commission. on Irrigation and Drainage, (1984).
- [8] Kalashnikov A. S., *Some Questions of the Qualitative Theory of non-Linear Degenerate Parabolic Second-order Equations*, Uspekhi Mat. Nauk., 42, 135-176, (1987).
- [9] Kirkham D. *Explanation of Paradoxes in Dupuit-Forchheimer Seepage Theory*, Water Resources Research, vol. 3, 2, 607-622, (1967).
- [10] Kirkham D. *Seepage of Steady Rainfall through Soil into Drains*, Trans. Am. Geoph. Union, vol 39, 5, 892-908, (1958).
- [11] Maidment D. R., *Handbook of Hydrology*, McGraw-Hill, (1993).

- [12] Mercado E. J. R., Fuentes R. C., Brambila P. F., *An Inverse Problem Applied to Irrigation*, II Joint Meeting Amer. Math. Soc.-Soc. Mat. Mex. Nov., (1995).
- [13] Mercado E. J. R., Namuche R., Fuentes R. C., Brambila P. F., *Naturaleza Fractal de la Difusividad Hidráulica*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, Oct., (1996).
- [14] Mercado E. J. R., González C., A., Brambila P. F., Saucedo R., H., *Régimen Transitorio de la Ecuación de Boussinesq para la Filtración*, VIII Congreso Nacional de Irrigación, Torreón, Cohahuila, Méx., Sept. (1998).
- [15] Namuche R., Fuentes C., Rendón L., Mercado R., Brambila F., *Análisis Probabilístico del Espaciamiento entre Drenos Subterráneos Parcelarios*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, Oct. (1996).
- [16] Olver P. J., *Applications Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, (1993).
- [17] Ovsiannikov L. V., *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, (1982).
- [18] Saucedo H. Fuentes C., Mercado R., *Una Solución con Elementos Finitos de la Ecuación del Drenaje Agrícola Unidimensional*, XXVII Cong. Nac. de la Ciencia del Suelo, Nov. (1996).
- [19] Smedena L. K., Rycroft D. W., *Land Drainage*, B. T. Batsford Ltd., (1983).
- [20] Sun N. Z., Yeh W., *Identification of Parameter Structure in Groundwater Inverse Problem*, Water Resources Research, vol 21,6,869-883, Junio (1985).
- [21] Tang Y. K., Skaags R. W., *Experimental Evaluation of Theoretical Solutions for Subsurface Drainage and Irrigation*, Water Resources Research, vol 13,6,957-965, (1977).
- [22] Tijonov A. Samarsky A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, (1980).

- [23] Toledo G. P., Novy R. A., Davis H. T., Scriven L. E., *Hydraulic Conductivity of Porous Media at Low Water Content*, Soil Sci. Soc. Am. J. vol. 54, 673-679, (1990).
- [24] Wesseling J. *A Comparison the Steady State Drain Spacing Formulas of Hooghoudt and Kirkham in Connection with Design Practice*, Journal of Hydrology 2, 25-32, (1964).
- [25] Widder D. V. *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, (1941).
- [26] Zimmerman R.W., Bodvarsson G.S., *Integral Method Solutions to Flow Problems in Unsaturated Porous Media*, Modeling and Analysis of Diffusive and Adventive Processes in Geosciences.

